

# 10

## DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL

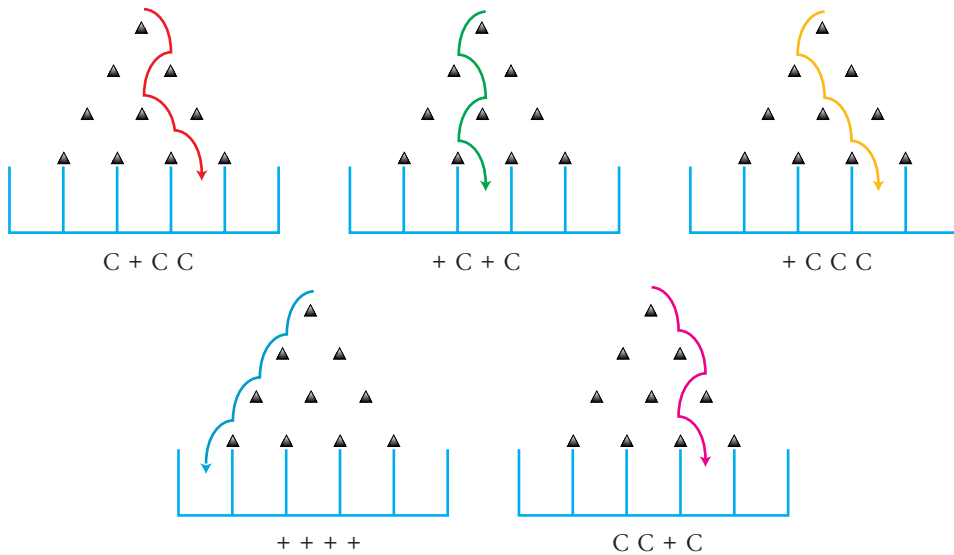
Página 232

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

■ Dibuja los recorridos correspondientes a:

$C + CC$ ,  $+C + C$ ,  $+CCC$ ,  $++++$ ,  $CC + C$



Problema 2

Observa que todos los recorridos que constan de 3 CARAS y 1 CRUZ llegan al mismo casillero.

Comprueba que ocurre lo mismo en los recorridos que tienen 2 CARAS y 2 CRUCES o bien 1 CARA y 3 CRUCES.



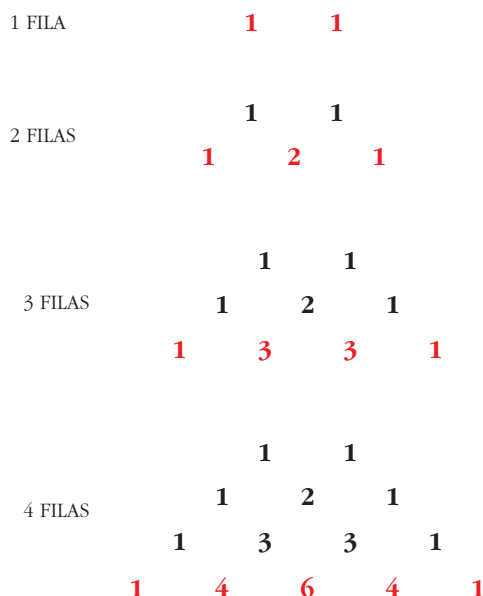
Dos caras y dos cruces significaría ir dos veces a la derecha y dos a la izquierda.

Una cara y tres cruces es una vez a la derecha y tres a la izquierda.

## Página 233

### Problema 3

Observa la serie:

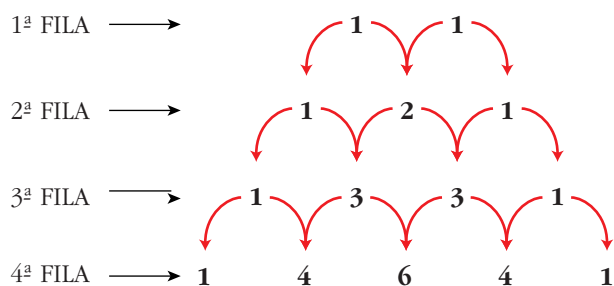


¿Sabrías poner la quinta fila?

1 5 10 10 5 1

### Problema 4

Observa cuál es el criterio para formar cada nueva fila a partir de la anterior en el triángulo numérico que acabamos de ver:



¿Adviertes la relación que existe entre estos números y el número de posibles recorridos de un perdigón en el aparato de Galton?

Los números de los extremos son *unos*. Cada uno de los demás se obtiene sumando los dos que tiene encima.

Construye ahora las filas 5ª y 6ª.

Fila 5ª → 1 5 10 10 5 1

Fila 6ª → 1 6 15 20 15 6 1

## Página 235

1. Calcula  $\bar{x}$  y  $\sigma$  en esta distribución: tiempo que emplean en ir de su casa al colegio un grupo de alumnos. [Recuerda: al intervalo (0, 5] le corresponde el valor 2,5...]

TIEMPO (minutos)	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]	(20, 25]	(25, 30]
Nº DE ALUMNOS	2	11	13	6	3	1

Hallamos la marca de clase,  $x_i$ , de cada intervalo y hacemos la tabla:

$x_i$	$f_i$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
2,5	2	5	12,5
7,5	11	82,5	618,75
12,5	13	162,5	2 031,25
17,5	6	105	1 837,5
22,5	3	67,5	1 518,75
27,5	1	27,5	756,25
	36	450	6 775

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{450}{36} = 12,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{6 775}{36} - 12,5^2} = \sqrt{31,94} = 5,65$$

## Página 238

1. En una bolsa hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar tres de ellas, las tres sean impares?

a) Si las extracciones son con reemplazamiento.

b) Si las extracciones son sin reemplazamiento.

$$a) \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

$$b) \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

## Página 239

1. Calcula:  $\binom{4}{0}$ ,  $\binom{4}{3}$ ,  $\binom{7}{4}$ ,  $\binom{9}{5}$ ,  $\binom{50}{4}$ ,  $\binom{50}{46}$ .

$$\binom{4}{0} = 1; \quad \binom{4}{3} = 4; \quad \binom{7}{4} = 35; \quad \binom{9}{5} = 126; \quad \binom{50}{4} = 230 300; \quad \binom{50}{46} = \binom{50}{4} = 230 300$$

2. Calcula:  $\binom{150}{0}$ ,  $\binom{150}{150}$ ,  $\binom{150}{1}$ ,  $\binom{150}{149}$ ,  $\binom{200}{198}$ .

$$\binom{150}{0} = 1; \quad \binom{150}{150} = 1; \quad \binom{150}{1} = 150; \quad \binom{150}{149} = 150; \quad \binom{200}{198} = 19 900$$

## Página 245

1. ¿Qué valores puede tomar la variable  $x$  en cada distribución de los ejemplos 1, 2, 3, 5 y 7 anteriores?

Ejemplo 1  $\rightarrow x = 0, 1, 2, \dots, 10$

Ejemplo 2  $\rightarrow x = 0, 1, 2, \dots, 6$

Ejemplo 3  $\rightarrow x = 0, 1, \dots, 100$

Ejemplo 5  $\rightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Ejemplo 7  $\rightarrow x = 0, 1, \dots, 100$

2. Inventa experiencias parecidas a las de los ejemplos 4 y 6, pero que sí sean binomiales.

Por ejemplo:

4. Extraemos una carta de una baraja, vemos si es o no OROS y la devolvemos al mazo. Barajamos y extraemos otra carta. Repetimos la experiencia cinco veces.

$$n = 5; p = 0,1 \rightarrow B(5; 0,1)$$

6. Nos preguntamos cuántos partidos ganará un equipo  $A$  que juega con un equipo  $B$ , los dos con la misma probabilidad de ganar, si juegan un partido diario a lo largo de 6 días.

$$n = 6; p = 0,5 \rightarrow B(6; 0,5)$$

## Página 249

1. Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta.

Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no.

$x_i$	4	3	2	1	0
$f_i$	23	48	17	9	3

La media es  $\bar{x} = 2,79$

Como  $n = 4$ ,  $\bar{x} = np \rightarrow 2,79 = 4p \rightarrow p = 0,6975$

Si fuera una binomial,  $p = 0,6975$  sería la probabilidad de que uno cualquiera de los alumnos asistiera un día a clase.  $q = 0,3025$ .

Con este valor de  $p$  se obtiene la siguiente tabla:

$x_i$	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	DIFERENCIAS
0	$q^4 = 0,008$	0,8	1	3	2
1	$4 p q^3 = 0,077$	7,7	8	9	1
2	$6 p^2 q^2 = 0,267$	26,7	27	17	10
3	$4 p^3 q = 0,411$	41,1	41	48	7
4	$p^4 = 0,237$	23,7	24	23	1

La mayor de las diferencias es 10. Es demasiado grande en comparación con el total, 100. Hemos de rechazar la hipótesis de que se trata de una binomial.

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

### PARA PRACTICAR

**1** Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

a) 2 ases.

b) Ningún as.

c) Algún as.

d) Sólo un as.

$$a) \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

$$b) \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$$

$$c) 1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26}$$

$$d) 2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39} = \frac{12}{65}$$

**2** Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras que salen. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres caras.

b) Una cara.

c) Más de una cara.

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$b) 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$c) P[\text{dos caras}] + P[\text{tres caras}] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

**3** En un examen hay que contestar a 2 temas elegidos al azar entre 30. Un alumno ha estudiado solo 12 de los 30 temas. Halla la probabilidad de que:

a) El alumno haya estudiado los dos temas elegidos.

b) El alumno solo haya estudiado uno de los temas elegidos.

c) Ninguno de los temas elegidos haya sido estudiado por el alumno.

$$a) P[\text{sepa el 1º y el 2º}] = P[\text{sepa el 1º}] \cdot P[\text{sepa el 2º/sabía el 1º}] =$$

$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0,15$$

$$b) P[\text{solo uno}] = 2 \cdot P[\text{sepa el 1º y no el 2º}] = 2 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{72}{145} = 0,50$$

$$c) P[\text{ninguno}] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0,35$$

4

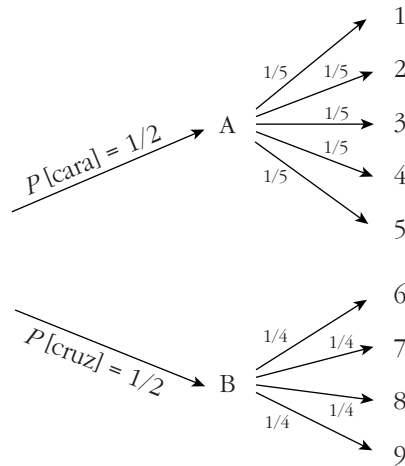
En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda; si sale cara, se extrae una bola de la urna A, y si sale cruz, se extrae una moneda de la urna B. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:

a) La que lleva el número 5.

b) La que lleva el número 8.

c) Lleve un número par.

Hacemos un diagrama en árbol para calcular fácilmente las probabilidades:



$$a) P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$b) P[8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$c) P[\text{par}] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{20} = 0,45$$

5

Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Hacemos 2 extracciones con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de obtener:

a) 2 bolas verdes.

b) Ninguna bola verde.

c) Una bola verde.

¿Cuáles serían las probabilidades si no hubiera reemplazamiento?

Con reemplazamiento:

$$a) \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,04$$

$$b) \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,64$$

$$c) 2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,32$$

Sin reemplazamiento:

$$a) \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0,0\bar{2}$$

$$b) \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0,6\bar{2}$$

$$c) 2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = 0,3\bar{5}$$

- 6** Extraemos al azar una ficha de un dominó normal (28 fichas) y sumamos los puntos de sus dos mitades.

Calcula la probabilidad de que la suma de puntos sea 6.

Hay 4 fichas en las que la suma de puntos es 6:

$$0-6 \quad 1-5 \quad 2-4 \quad 3-3$$

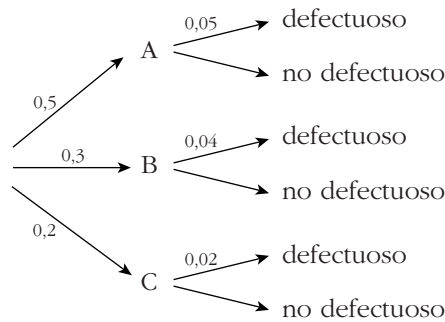
El total de fichas es 28, luego la probabilidad pedida es:

$$\frac{4}{28} = \frac{1}{7} \approx 0,14$$

- 7** Una fábrica tiene tres máquinas que fabrican tornillos. La máquina A produce el 50% del total de tornillos, la máquina B el 30% y la C el 20%. De la máquina A salen un 5% de tornillos defectuosos, de la B un 4% y de la C un 2%.

Calcula la probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[\text{defectuoso}] = 0,5 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,02 = 0,041$$

## Distribuciones de probabilidad

- 8** Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros:

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	0,1	0,3	...	0,1

$$0,1 + 0,3 + P[2] + 0,1 = 1 \rightarrow P[2] = 0,5$$

$x_i$	$p_i$	$x_i p_i$	$p_i x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
		$\sum x_i p_i = 1,6$	$\sum p_i x_i^2 = 3,2$

$$\mu = \sum x_i p_i = 1,6$$

$$\sigma = \sqrt{3,2 - 1,6^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

**9** Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2).

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

a)

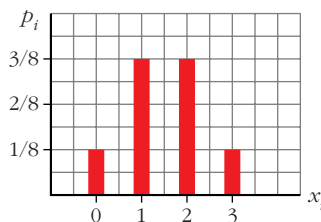
$x_i$	0	1	2
$P_i$	$\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39}$	$2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39}$	$\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}$

b)  $\mu = 0,2$ ;  $\sigma = 0,42$

**10** Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras obtenidas. Haz una tabla con las probabilidades, represéntala gráficamente y calcula la media y la desviación típica.

$x_i$	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\mu = 1,5$ ;  $\sigma = 0,87$



**11** Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2..., 10, 11 y 12 con probabilidades distintas.

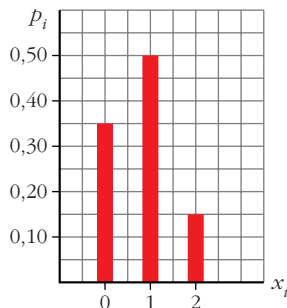
Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula  $\mu$  y  $\sigma$ .

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_i$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

$\mu = 6$ ;  $\sigma = 3$

**12** Un alumno ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en el examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno. Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente.

$x_i$	0	1	2
$P_i$	0,35	0,50	0,15





## Página 254

- 13** Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.

- a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.  
b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

a)

$x_i$	0	1	2
$p_i$	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$

b)

$x_i$	0	1	2
$p_i$	$\left(\frac{7}{10}\right)^2$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$

- 14** En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una bola de A, y si sale cruz, se saca de B. Se observa el número que tiene la bola.

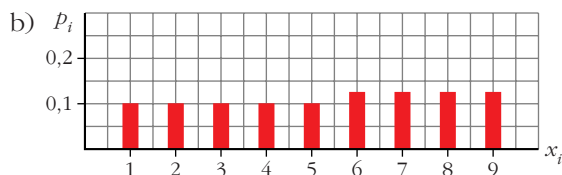
- a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.  
b) Representala gráficamente.  
c) Calcula  $\mu$  y  $\sigma$ .

a)

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0,1$

$x_i$	6	7	8	9
$p_i$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0,125$	0,125	0,125	0,125



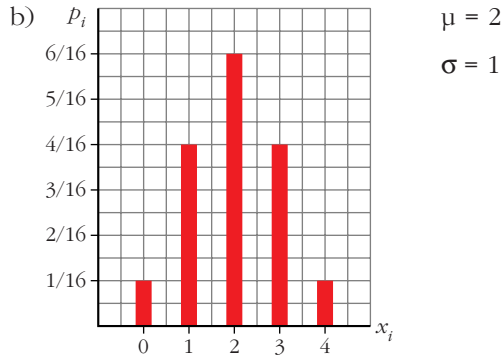
c)  $\mu = 5,25$ ;  $\sigma = 2,59$

- 15** En las familias con 4 hijos e hijas, nos fijamos en el número de hijas.

- a) Haz la tabla con las probabilidades suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma.  
b) Representala gráficamente y halla la media y la desviación típica.

a)

$x_i$	0	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$



## Distribución binomial

**16** En una distribución binomial  $B(7; 0,4)$  calcula:

- a)  $P[x = 2]$                       b)  $P[x = 5]$                       c)  $P[x = 0]$   
d)  $P[x > 0]$                       e)  $P[x > 3]$                       f)  $P[x < 5]$

a)  $\binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 = 0,261$

b)  $\binom{7}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^2 = 0,077$

c)  $0,6^7 = 0,028$

d)  $1 - P[x = 0] = 0,972$

e) 0,290

f) 0,904

**17** En una distribución binomial  $B(9; 0,2)$  calcula:

- a)  $P[x < 3]$     b)  $P[x \geq 7]$   
c)  $P[x \neq 0]$     d)  $P[x \leq 9]$

a)  $P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0,738$

b)  $P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0,000314$

c)  $1 - P[x = 0] = 1 - 0,134 = 0,866$

d) 1

**18** Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien 4 preguntas?  
b) ¿Y la de que conteste correctamente más de 2 preguntas?  
c) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas.

$$x \text{ es } B\left(10; \frac{1}{4}\right)$$

$$a) P[x = 4] = \binom{10}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^6 = 0,146$$

$$b) P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) = \\ = 1 - (0,056 + 0,188 + 0,282) = 1 - 0,526 = 0,474$$

$$c) P[x = 0] = 0,75^{10} = 0,056$$

**19** Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si esta experiencia se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres bolas rojas.

b) Menos de tres rojas.

c) Más de tres rojas.

d) Alguna roja.

Si consideramos éxito = “sacar roja”,  $x$  es  $B(5; 0,3)$

$$a) P[x = 3] = \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 = 0,1323$$

$$b) P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = \\ = 0,16807 + 0,36015 + 0,3087 = 0,83692 \approx 0,8369$$

$$c) P[x > 3] = 1 - P[x \leq 3] = 1 - (0,1323 + 0,8369) = 0,0308$$

$$d) P[x \neq 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,16807 = 0,8319$$

**20** Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial y di los valores de  $n$ ,  $p$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ .

a) Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que sólo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?

b) En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.

c) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.

d) El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan a 46 números.

e) El 1% de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.

$$a) B\left(50; \frac{1}{3}\right); \mu = \frac{50}{3} = 16,67; \sigma = 3,33$$

$$b) B\left(30; \frac{1}{3}\right); \mu = 10; \sigma = 2,58 \text{ relativo a las que contesta al azar}$$

c)  $B\left(400; \frac{1}{2}\right); \mu = 200; \sigma = 10$

d)  $B(46; 0,11); \mu = 5,06; \sigma = 2,12$

e)  $B(1000; 0,01); \mu = 10; \sigma = 3,15$

## PARA RESOLVER

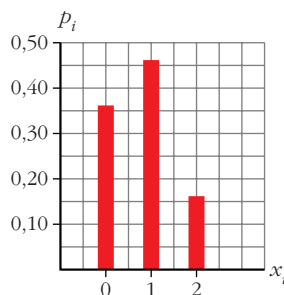
- 21** Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos dos veces y anotamos el número de cruces. Haz una tabla con la distribución de probabilidad, represéntala gráficamente y calcula su media y su desviación típica.

$x$  es  $B(2; 0,4)$

$x_i$	0	1	2
$P_i$	0,36	0,48	0,16

$\mu = 0,8$

$\sigma = 0,69$



- 22** La probabilidad de que un aparato de televisión, antes de revisarlo, sea defectuoso, es 0,2. Al revisar cinco aparatos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

b) ¿Y la de que haya alguno defectuoso?

$x$  es  $B(5; 0,2)$

a)  $P[x = 0] = 0,8^5 = 0,328$

b)  $P[x \neq 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,328 = 0,672$

## Página 255

- 23** En una fiesta hay tantos chicos como chicas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de seis personas haya tres chicas?

b) ¿Y la de que haya menos de tres chicas?

$x$  es  $B(6; 0,5)$

a)  $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^3 = 0,3125$

b)  $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0,5^6 + 6 \cdot 0,5^6 + 15 \cdot 0,5^6 = 0,3437$

**24** La probabilidad de que un torpedo lanzado por un submarino dé en el blanco es 0,4. Si se lanzan 6 torpedos, halla la probabilidad de que:

a) Solo uno dé en el blanco.

b) Al menos uno dé en el blanco.

$x$  es  $B(6; 0,4)$

$$a) P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^5 = 0,1866$$

$$b) P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,6^6 = 0,9533$$

**25** En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos.

Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

$x$  es  $B(50; 0,02)$

$$a) P[x = 0] = 0,98^{50} = 0,364$$

$$b) P[x = 1] = 50 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{49} = 0,372$$

$$c) P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) = \\ = 1 - (0,364 + 0,372 + 0,186) = 1 - 0,922 = 0,078$$

Por término medio, habrá  $\mu = 50 \cdot 0,02 = 1$  tornillo defectuoso en cada caja.

**26** Un tipo de piezas requiere de 4 soldaduras. Se hace un control de calidad a mil de esas piezas y se obtienen los siguientes resultados:

SOLDADURAS DEFECTUOSAS	0	1	2	3	4
PIEZAS	603	212	105	52	28

¿Se ajustan estos datos a una binomial?

La media de la muestra es  $\bar{x} = 0,69$ .

Si las cuatro soldaduras tuvieran la misma probabilidad,  $p$ , de ser defectuosa y fueran independientes, el número,  $x$ , de soldaduras defectuosas en cada pieza seguiría una distribución binomial  $B(4, p)$ , por lo cual:

$$\bar{x} = 4 \cdot p \rightarrow 0,69 = 4p \rightarrow p = 0,1725$$

Veamos cómo se comportaría, teóricamente, esta binomial con 1000 individuos y comparémoslo con los resultados de la muestra:

$x_i$	$p_i = P[x = x_i]$	$1000 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	DIFERENCIAS
0	0,4689	468,9	469	603	134
1	0,3910	391,0	391	212	179
2	0,1223	122,3	122	105	17
3	0,0170	17,0	17	52	35
4	0,0009	0,9	1	28	27

Las diferencias son enormes. Se rechaza la hipótesis de que “el número de soldaduras defectuosas en una pieza” siga una distribución binomial.

## CUESTIONES TEÓRICAS

**27** En una distribución  $B(4; 0,25)$  comprueba que:

$$P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = 1$$

$$0,75^4 + 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75^3 + 6 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 + 4 \cdot 0,25^3 \cdot 0,75 + 0,25^4 = 1$$

**28** Compara la media de las distribuciones binomiales  $B(200; 0,06)$  y  $B(30; 0,4)$ . ¿Cuál de ellas tiene mayor dispersión?

• *Halla el coeficiente de variación de cada una.*

$$B(200; 0,06) \rightarrow \mu = 12; \sigma = 3,36$$

$$B(30; 0,4) \rightarrow \mu = 12; \sigma = 2,68$$

Tiene mayor dispersión la primera,  $B(200; 0,06)$ .

**29** En una bolsa hay 5 bolas blancas, 7 rojas y 8 negras. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Queremos calcular la probabilidad de que, al hacer tres extracciones, las tres bolas sean de distinto color. ¿Es una distribución binomial? Justifica tu respuesta.

$$P[B, R \text{ y } N] = 6 \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0,21$$

No es una binomial, porque no hay solo dos posibilidades.

**30** En una mano de póker se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga  $k$  figuras ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$  ó  $5$ ). ¿Por qué no es una distribución binomial?

Cada vez que se extrae una carta de la baraja, varía la composición de ésta. Por tanto, la probabilidad de “FIGURA” no es constante para cada una de las cinco cartas.

## PARA PROFUNDIZAR

- 31** Una empresa hace un estudio para decidir si lanza un producto A u otro B. Según el estudio, si lanza A tiene una probabilidad de 0,7 de ganar 25 millones y una probabilidad de 0,3 de perder 7 millones. Si lanza B, tiene una probabilidad de 0,8 de ganar 20 millones y una probabilidad de 0,2 de perder 5 millones. ¿Qué producto debe comercializar? ¿Por qué?

Calculamos las ganancias esperadas con cada opción:

- Si comercializa A  $\rightarrow 25 \cdot 0,7 - 7 \cdot 0,3 = 15,4$  millones
- Si comercializa B  $\rightarrow 20 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,2 = 15$  millones

Por tanto, debe comercializar A.

- 32** Analiza la demostración de la equivalencia de las expresiones de la varianza de una distribución de probabilidad. Justifica todos los pasos.

$$\begin{aligned}\sum p_i (x_i - \mu)^2 &= \sum p_i (x_i^2 - 2x_i \mu + \mu^2) = \sum p_i x_i^2 + \sum p_i (-2x_i \mu) + \sum p_i \mu^2 = \\ &= \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \mu + \mu^2 \cdot 1 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2\end{aligned}$$

- 1) Desarrollamos el cuadrado.
- 2) Separamos en sumandos.
- 3) Sacamos factor común las constantes de los sumatorios.
- 4) Tenemos en cuenta que  $\sum p_i x_i = \mu$  y que  $\sum p_i = 1$ .
- 5) Agrupamos los sumandos.

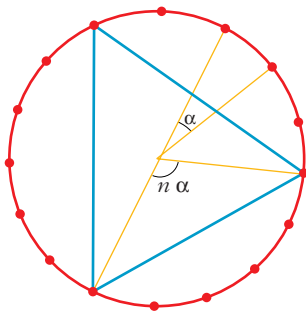
## PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 33** En una circunferencia se señalan 16 puntos igualmente espaciados. Se eligen al azar tres de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo determinado por ellos:

a) sea equilátero?

b) sea rectángulo?

a)



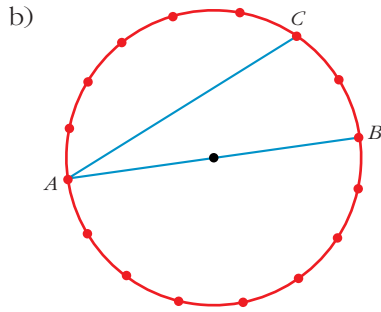
$$\alpha = \frac{360^\circ}{16} = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$$

Para que el triángulo fuera equilátero, debería ser:

$$n\alpha = 120^\circ \Rightarrow n = \frac{120^\circ}{22,5^\circ} = 5,3$$

que no es entero; por tanto, es imposible que el triángulo sea equilátero. (Para poder obtenerlo, el número de puntos señalados debería ser múltiplo de 3).

Así:  $P[\text{equilátero}] = 0$



Llamamos  $A, B, C$  a los vértices.

Para que el triángulo sea rectángulo, dos de sus vértices deben ser opuestos respecto al centro de la circunferencia. Luego la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}
 &P[B \text{ opuesto a } A] + P[B \text{ no opuesto a } A] \cdot \\
 &\quad \cdot P[C \text{ opuesto a } A \text{ o a } B] = \\
 &= \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2
 \end{aligned}$$

**34 Un grupo de viajeros, al acabar una excursión, intercambiaron sus fotografías. Averigua cuántos eran sabiendo que se intercambiaron 812 fotografías.**

Si  $n$  es el número de viajeros, se intercambiaron  $n \cdot (n - 1)$  fotografías; es decir:

$$n(n - 1) = 812$$

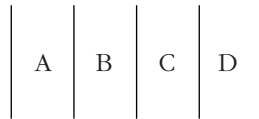
Descomponiendo 812 en factores primos, observamos que:

$$812 = 2^2 \cdot 7 \cdot 29 = 28 \cdot 29$$

Por tanto,  $n = 29$  viajeros.

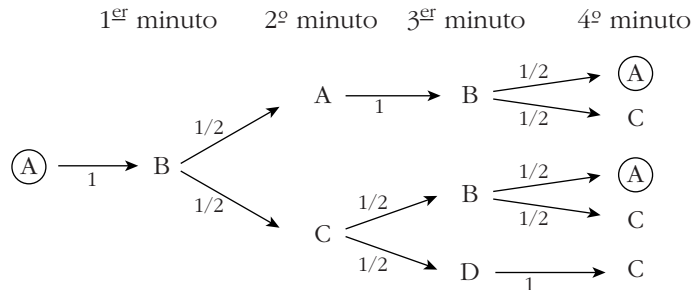
**35 En la autopista, un cierto conductor cambia de carril cada minuto. Si la autopista tiene cuatro carriles y el conductor pasa al azar de uno a otro, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro minutos más tarde se encuentre en el carril de partida? (Estudia los casos en que el carril sea interior o exterior.)**

Llamamos  $A, B, C, D$  a cada uno de los cuatro carriles.



Hacemos un diagrama en árbol:

1<sup>er</sup> caso: parte de un carril exterior (de  $A$  o de  $D$ ):



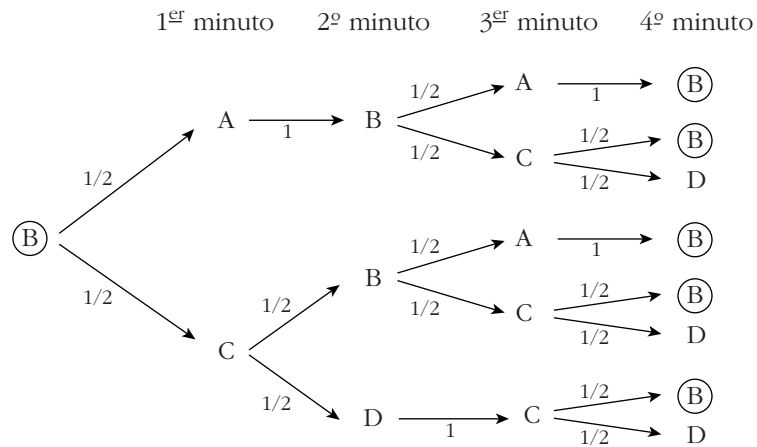
$$P[\text{acabar en } A \text{ partiendo de } A] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$



Análogamente:

$$P[\text{acabar en } D \text{ partiendo de } D] = \frac{3}{8}$$

2º caso: parte de un carril interior (de  $B$  o de  $C$ ):



$$P[\text{acabar en } B \text{ partiendo de } B] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16}$$

Análogamente:

$$P[\text{acabar en } C \text{ partiendo de } C] = \frac{11}{16}$$